FELLOWSHIP- ANTRAG

CAS-UNTERSTÜTZTE BEWEISPROZESSE (CUBE) –
NEUE WEGE IN DER MATHEMATIKLEHRKRÄFTEAUSBILDUNG

Bewerbung um ein Fellowship im gemeinsamen Programm des Thüringer Ministeriums für Wirtschaft, Wissenschaft und Digitale Gesellschaft und des Stifterverbandes
FELLOWSHIPS FÜR INNOVATIONEN IN DER DIGITALEN HOCHSCHULLEHRE

Charakteristikum der geplanten **Lehrinnovation** ist ein mittels **Computer-Algebra-System**[1] (CAS) **digital gestütztes Lehrformat**, welches eine verstärkte Förderung von Lehramtsstudierenden in der Kompetenz des mathematischen Beweisens zum Ziel hat. Das Lehrangebot richtet sich an Studierende der Universität Erfurt vor allem im Lehramt an Regelschulen und an berufsbildenden Schulen. Gleichermaßen dient es einer Verstetigung und Vertiefung des an Thüringer Gymnasien verbindlichen CAS-Einsatzes im Mathematikunterricht. CAS wird in der Schulmathematik vor allem mit dem Ziel der Reduzierung des Rechenaufwands, der Erleichterung des Umgangs mit großen Datenmengen sowie zur Veranschaulichung mathematischer Objekte eingesetzt. Ähnliche Ziele verfolgt auch die Hochschuldidaktik in Studiengängen mit dem Schwerpunkt Mathematik (z. B. im Ingenieur-, Informatik-, Mathematik- und Mathematiklehramtsstudium). Hier sind die Durchführung von langwierigen Berechnungen, das Programmieren von Algorithmen und die Veranschaulichung von geometrischen Objekten zu nennen (Koepf, 2016). Die Neuartigkeit der Lehrinnovation besteht darin, ein CAS zur **Unterstützung kognitiver Prozesse beim mathematischen Beweisen** zu verwenden. Die Fellowship-Bewerberin hat hierzu erste Konzepte bereits entwickelt und pilotiert (siehe Abschnitt EIGENE VORARBEITEN). Da es in der Hochschullehre bisher nur wenige Ansätze und Auswertungen zum CAS-Einsatz gibt, ist das geplante Vorgehen **zum Finden und Führen von mathematischen Beweisen** mit Hilfe eines CAS samt Evaluation der Wirksamkeit **eine wesentliche konzeptionelle Neuerung.**
Beantragt werden

- ein Fellowship für 12 Monate zur Gegenfinanzierung einer befristeten Lehrdeputatsreduktion für Frau Dr. Kinga Szűcs, wiss. Mitarbeiterin im Fachbereich Mathematikdidaktik der Universität Erfurt. Die zeitlichen Freiräume werden zur methodisch-konzeptionellen Neugestaltung, eigenständigen Durchführung sowie Evaluation eines vorhandenen Bachelor-Pflichtmoduls im Bereich Mathematik aus dem Blickwinkel des CAS-Einsatzes bei Beweisprozessen genutzt.
- projektbezogene Personal-, Reise- und Sachkosten, welche im Finanzierungsplan ausführlich aufgelistet sind.

[1] Ein Computer-Algebra-System ist ein Computerprogramm, welches nicht nur durch Zahlen, sondern auch durch Variablen, Terme, Gleichungen etc. dargestellte Aufgaben bewältigen kann. Somit geht die Tragweite seiner Funktionalität deutlich über die eines herkömmlichen Taschenrechners hinaus.

Ausgangslage und Problemstellung

Beweise spielen **in der Fachwissenschaft Mathematik** eine zentrale Rolle, da sie eines der wichtigsten Mittel der Erkenntnisgewinnung und -sicherung verkörpern (Hanna & Barbeau, 2008; Jahnke, Sommerhoff & Ufer, 2023). Sie tragen dazu bei, dass die mathematischen Inhalte axiomatisch-deduktiv strukturiert werden, generieren aber auch neues Wissen (de Villiers, 1990). Der unbestritten hohe Stellenwert der Beweise in der Mathematik zeigt sich auch, wenn Heintz (2000) von der identitätskonstituierenden Funktion der Beweise in der Mathematik spricht und formuliert, dass sich die Mathematik über Beweise definiere (vgl. auch Rav, 1999, Ziegler, 2008). Gleichzeitig gilt, dass Beweise das typische Instrument mathematischen Tuns darstellen (Leuders, 2018; Jahnke, Sommerhoff & Ufer, 2023) und zur Verständnisförderung beitragen (Davis, Hersh & Marchisotto, 1981; de Villiers, 1990).

Ziel des **Mathematikstudiums** ist, Studierende in diese beweisende Disziplin (Heintz, 2000) einzuführen (Weber & Lindmeier, 2020). Die Hochschule orientiert sich an anderen Normen als die **Schule** (Nagel & Reiss, 2016). Dies zeigt sich unter anderem im unterschiedlichen Stellenwert, der deduktiven Beweisen in der Schulmathematik bzw. in der Hochschulmathematik beigemessen wird (Rach, Siebert, & Heinze, 2016; Weber & Lindmeier, 2020). Während in der Schule Mathematik mit Fokus auf die Lösung praktischer Aufgaben vermittelt wird, wobei Beweise eher eine dekorative Funktion haben, steht in der Hochschulmathematik die theoretische Organisation des mathematischen Inhalts und die Begründung des Wissens sowie die Vermittlung der Vorstellung von formalen Beweisen im Mittelpunkt (Guedet et al., 2016). Hinzu kommt, dass in der Schule oft Plausibilitätsüberlegungen herangezogen werden, um Aussagen oder Regeln zu begründen (Rach et al., 2016), die keine deduktiven Argumentationen – also Beweise – darstellen. Brunner (2014) behauptet, dass Beweise aus der Schule bis auf wenige Ausnahmen verschwunden sind. Somit wird in der Schule die für die Mathematik typische Sicherung des Wissens durch Axiome, Sätze und Beweise weitgehend ausgeklammert. Diese unterschiedliche Schwerpunktsetzung kann dazu führen, dass Studierende keinen Zusammenhang außer dem Wort „Mathematik“ zwischen Mathematik in der Schule und Mathematik an der Hochschule erkennen (Witzke, 2015). Somit müssen Studierende am Übergang Schule-Hochschule zum einen erkennen, dass in der Hochschulmathematik Beweise das zentrale Instrument der Evidenzerzeugung sind (Weber & Lindmeier, 2020), zum anderen müssen sie von Plausibilitätsüberlegungen zum formal-deduktiven Beweisbegriff durchdringen.

Eine weitere Diskrepanz zwischen Schule und Hochschule ist mit Bezug zum Medieneinsatz im Mathematikunterricht zu verzeichnen. Im Mathematikunterricht in der Schule werden diverse **digitale Technologien** – Softwares, Apps, Tabellenkalkulation, PC, Ipad, Taschenrechner, CAS etc. – eingesetzt, um Erkundungen durchzuführen, Algorithmen zu entwickeln, zwischen Darstellungsformen zu wechseln u. v. m. Die immer größere Bedeutung digitaler Werkzeuge in der Schulmathematik wird durch die Etablierung der Kompetenz „Mit Medien mathematisch arbeiten“ (KMK, 2022:13f) verdeutlicht, welche den bewussten und zielgerichteten Umgang mit analogen und digitalen Technologien einschließlich CAS umfasst. In Thüringen wird das CAS im Mathematikunterricht in den letzten vier Jahren des Gymnasiums seit 2010 verbindlich eingesetzt (TMBWK, 2011; TMBJS, 2018) und auch in der Abiturprüfung verwendet. Im Gegensatz hierzu wird Mathematik an der Hochschule – auch im Lehramtsstudium – oft herkömmlich (mit Papier und Bleistift) vermittelt. In einer gemeinsamen Stellungnahme fordern daher die für die Mathematik und den Mathematikunterricht verantwortlichen, führenden Vereine, dass digitale Medien, die im schulischen Mathematikunterricht bereits zur Unterstützung der Lernprozesse eingesetzt werden, ebenfalls integrativen Bestandteil der Lehramtsausbildung bilden sollen (DMV, GDM, & MNU, 2008).

Aus diesen Rahmenbedingungen ergeben sich in der Mathematiklehrkräfteausbildung in Thüringen folgende drei zentrale Problemfelder:

1. Studierende haben Schwierigkeiten, ihre **fachlichen Kompetenzen bezogen auf das Beweisen** zu erweitern. Dies gilt vor allem, da sie in der Schule, wenn überhaupt, nur vereinzelt Beweise kennenlernen und Sätze, Regeln, etc. unter Rückgriff auf Plausibilitätsüberlegungen begründen. Sie sollen sich einen Zugang zu formal-deduktiven Beweisen der Hochschulmathematik verschaffen, ohne anschlussfähiges Wissen mit Bezug zu Beweisen aus der Schule mitgebracht zu haben.
2. Der verbindliche Einsatz des CAS in der Schulmathematik wird an der Hochschule nicht systematisch fortgesetzt, somit fehlt der Anschluss an wichtige, bereits vorhandene **digitale Kompetenzen** im Rahmen des Studiums.
3. Wenn Studierende mit Beweisen ausschließlich in der Hochschulmathematik vertraut gemacht werden, fehlt es ihnen an tragfähigen **fachdidaktischen** Konzepten und **Kompetenzen,** wie sie in ihrem zukünftigen Mathematikunterricht den Lernenden einen Zugang zu Beweisen der Schulmathematik ermöglichen können. Insbesondere der stark betonte Formalismus, der Beweise der Hochschulmathematik auszeichnet, macht es ungeeignet, eine entsprechende Transferleistung zu erbringen. Die authentische Vermittlung von der Mathematik in der Schule schließt allerdings die Auseinandersetzung mit Beweisen ein (Bauer & Büchter, 2018).

Die **grundlegende Idee der Lehrinnovation** besteht darin, bei der Begegnung dieser Problemfelder auf vorhandene digitale Kompetenzen seitens der Studierenden mit Bezug zum CAS zurückzugreifen, wodurch nicht nur eine Verstetigung des verbindlichen CAS-Einsatzes im Thüringer Mathematikunterricht, sondern auch eine Vernetzung der fachlichen, fachdidaktischen und digitalen Kompetenzen erreicht werden kann. Dies steht im Einklang mit der für die Ausbildung von Mathematiklehrkräften geforderten Medienintegration (Barzel et al., 2016).

Persönliche Motivation und Expertise

Die Fellowship-Bewerberin verfügt über langjährige Erfahrungen in der **Lehrtätigkeit zur Hochschulmathematik und zur Mathematikdidaktik** an verschiedenen Hochschulen. Sie ist seit mehr als anderthalb Jahrzehnten nicht nur in der Ausbildung angehender, sondern ebenso in der Fortbildung beruflich agierender Lehrkräfte tätig. Dabei bildet das CAS einen besonderen Schwerpunkt, verwiesen sei dazu auf einschlägige Vorträge (Szűcs, 2023[2]; 2017b; 2016), Publikationen (Szűcs, 2019; 2018; 2017a; Szűcs & Müller, 2013) und insbesondere auf die ThILLM-DZLM Weiterbildung (2017). Der Bewerbung liegt außerdem die Überzeugung zugrunde, dass durch den geplanten CAS-Einsatz das mathematische Beweisen als Wesensbestandteil von Mathematik einen gleichermaßen **dringlichen** wie **nachdrücklichen** Schub erhält.

Eigene Vorarbeiten

Der Einsatz von CAS ermöglicht vor allem Manipulationen an algebraischen Ausdrücken (Zehavi & Mann, 2009), demzufolge kann CAS bei der Vermittlung solcher Beweise verwendet werden, die überwiegend algebraische Umformungen erfordern. Solche Beweise findet man in der Hochschulmathematik hauptsächlich in der linearen Algebra, der Zahlentheorie und der Analysis. Aufgreifend die von Dana-Picard (2006) publizierten didaktischen Überlegungen und unterrichtspraktischen Ideen zur Findung und Führung von Beweisen in der Hochschulmathematik unter Rückgriff auf CAS, wurden erste Konzepte mit Bezug zu zentralen Inhalten dieser mathematischen Disziplinen entwickelt und veröffentlicht (Szűcs, 2020). Die Tragweite und das didaktische Potenzial dieser ersten Konzepte zeigt, dass eines von ihnen – ein Ansatz am Übergang Schule-Hochschule – in eine aktuelle Übersichtsarbeit (Pinkernell et al., 2022) aufgenommen wurde. Diese und die seitdem entwickelten drei weiteren Kon-zepte (Szűcs, 2021; 2022a). zeigen auf, dass das Finden und Führen von Beweisen mit Hilfe des CAS – zumindest zu ausgewählten Sätzen der Hochschulmathematik – durchaus möglich ist und hohes fachdidaktisches Potenzial hat.

Um diese Konzepte in der Unterrichtspraxis erfolgreich umsetzen zu können, sind allerdings didaktische Ansätze notwendig, damit Studierende den Weg von den aus der Schule bekannten Plausibilitätsüberlegungen hin zu formalen Beweisen einschlagen können. Aus diesem Grund wurde für die weitere Arbeit das Modell, welches zwischen experimentellen, operativen und formalen Beweisen unterscheidet (Wittmann & Müller, 1988), herangezogen. Dieses Modell soll als Taxonomie verstanden werden. Experimentelle Beweise verifizieren oder falsifizieren zwar einen vermuteten Zusammenhang anhand einiger konkreter Beispiele, sie geben allerdings keine zuverlässige Einsicht in die Allgemeingültigkeit des Zusammenhangs. Experimentellen

[2] Die Vorträge und Publikationen der Fellowship-Bewerberin sind im beigefügten Lebenslauf unter „Projektspezifische Publikationen und Vorträge" zu finden.

Beweisen liegt induktives Begründen zu Grunde, welches wahrscheinlich, aber nicht sicher ist (Brunner, 2014), sie kommen Plausibilitätsüberlegungen nahe. Operative und formale Beweise sind demgegenüber deduktiv und unterscheiden sich voneinander nur in der Ebene der Darstellung: Während bei formalen Beweisen an durch Symbole dargestellten Objekten symbolische Operationen durchgeführt werden, stützen sich operative Beweise auf konkrete Operationen, die an konkreten Darstellungen ausgeführt werden. Somit wird klar, dass das Durchlaufen der Stufen vom experimentellen über den operativen zum formalen Beweis einen Zugang zu formalen Beweisen sowohl in der Schule als auch in der Hochschule ermöglicht.

So wurden einerseits die in den ersten drei Veröffentlichungen (Szűcs, 2020; 2021; 2022a) thematisierten Beweise ins Modell von Wittmann und Müller (1988) eingebettet, andererseits weitere Beweise mit Bezug zum Modell entwickelt (Szűcs, 2022b, 2022c). Die Entwicklung von CAS-unterstützten Beweisen wird seitdem fortge-setzt. Zudem erfolgte in den vergangenen drei Semestern punktuell – d. h. in jeweils einer Sitzung einer Mathematiklehrveranstaltung für Lehramtsstudierende – eine erfolgreiche unterrichtspraktische Pilotierung an der Universität Erfurt. Die Ermöglichung dieser Pilotierung ist der reibungslosen, innovative Ideen unterstützenden Zusammenarbeit mit den Kollegen aus der Arbeitsgruppe Mathematik zu verdanken, mit der die Arbeitsgruppe Mathematikdidaktik an der Universität Erfurt eine organisatorische Einheit, nämlich das Fachgebiet Mathematik und Mathematikdidaktik bildet.

ZIELSETZUNG UND NEUARTIGKEIT DER LEHRINNOVATION

Mit der geplanten Lehrinnovation wird in erster Linie das Ziel verfolgt, anhand der bereits existierenden Ansätze, welche das CAS-unterstützte Beweisen in der Hochschulmathematik ermöglichen, für eine Lehrveranstaltung im Bereich der Mathematik (Arithmetik und Algebra[3]) ein **durchgehend integratives Konzept** zu entwickeln, zu erproben und zu evaluieren, welches neue, CAS-unterstützte Zugänge zu den curricular festgelegten mathematischen Beweisen bereitstellt. Diese Lehrveranstaltung ist für alle Bachelor-Studierenden mit Nebenfach Mathematik verbindlich im ersten Studienjahr, aktuell wird sie von ca. 200 Studierenden besucht. Da in Klausuren, Prüfungen etc. Beweise von den Studierenden nach wie vor mit Papier und Stift erwartet werden, geht es bei der Lehrinnovation nicht um den Ersatz des herkömmlichen Weges, sondern um die Ermöglichung eines digital unterstützten Zugangs hierzu. Durchgehend, d. h. in jedem Teilbereich der Thematik der Lehrveranstaltung soll ein Zugang zu ausgewählten Beweisen unter Rückgriff auf das CAS exemplarisch angeboten werden. Hierbei soll das Modell von Wittmann und Müller (1988) als didaktische Richtlinie dienen, um den Weg von den aus der Schule bekannten Plausibilitätsüberlegungen zum

[3] Eine entsprechende Absichtserklärung zur Unterstützung des Vorhabens von Seiten des Dozierenden der genannten Fachlehrveranstaltung sowie des Lehrstuhlinhabers ist in der Anlage zu finden.

formalen Beweisen zu schaffen. Hierdurch wird vor allem **die Förderung der fachlichen Kompetenzen** der Studierenden unter **Rückgriff auf ihre digitalen Kompetenzen sowie die Erweiterung Letzterer** angestrebt. Wie in der Evaluation der Pilotierung ein Proband auf den Punkt gebracht hat: *„Persönlich finde ich die Möglichkeit gut, da man den Beweis visuell vor sich hat und die Software das Rechnen übernimmt. So kann man sich besser auf die Beweisführung an sich konzentrieren.“* Es wird zudem der Frage nachgegangen, inwieweit die Lehrinnovation den Erwerb der fachlichen Kompetenzen der Studierenden positiv beeinflusst. Hierzu werden fachliche Kompetenzen vor und nach der Intervention sowie mit einer Kontrollgruppe verglichen.

Bei der Vermittlung von Mathematik werden in der Schule und an der Hochschule unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt (AUSGANGSLAGE UND PROBLEMSTELLUNG), daher ist ein Transfer der CAS-unterstützten Beweise von der Hochschulmathematik in die Schulmathematik nicht selbstverständlich. Um tragfähige Konzepte auch für die spätere Unterrichtspraxis zu vermitteln, wird daher angestrebt, anhand der mit Bezug zur Hochschulmathematik gesammelten Erfahrungen beim CAS-unterstützten Beweisen im Rahmen von zwei bis drei Lehrveranstaltungen Beispiele für CAS-unterstützte experimentelle, operative und formale Beweise für den Einsatz in der Sekundarstufe I (für Studierende des Lehramts an Regelschulen) sowie in der Sekundarstufe II (für Studierende des Lehramts an berufsbildenden Schulen) zu entwickeln. Hierbei können auch Grenzen des CAS-Einsatzes beim Beweisen ausgelotet und bewusstgemacht werden. Hierdurch werden **fachdidaktische Kompetenzen** gefördert.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Lehrinnovation, welche aus der Entwicklung eines mathematikbezogenen hochschuldidaktischen Konzeptes als Basis für ein digital gestütztes Lehrformat sowie aus dessen praktischer Umsetzung besteht, folgende, in der Hochschulmathematik bisher unbeachtete Aspekte umfasst:

A) Fortsetzung des CAS-Einsatzes im Studium,
B) Ermöglichung eines CAS-unterstützten Zugangs zu formalen Beweisen,
C) Vermittlung eines didaktischen Modells, welches schrittweise von Plausibilitätsüberlegungen zu formalen Beweisen führt und
D) Entwicklung von unterrichtspraktisch-didaktischen Ideen für die Vermittlung von Beweisen in der Schule mit Hilfe von CAS.

Diese Aspekte können im weit verbreiteten TPaCK-Modell (Koehler & Mishra, 2008) zur erfolgreichen Implementierung von digitalen Technologien in die Ausbildung von Fachlehrkräften wie folgt verortet werden (Abb. 1): Mit der Fortsetzung des CAS-Einsatzes im Studium (A) wird die Förderung des technologischen Wissens (TK) erzielt, während der CAS-unterstützte Zugang zu formalen Beweisen (B) zur Förderung des Inhaltswissens (CK) sowie des technologiebezogenen Inhaltswissens (TCK) beiträgt. Überdies wird durch die Thematisierung eines didaktischen Modells zur Hinführung zu formalen Beweisen (C) pädagogisches Wissen (PK) vermittelt, und da hierbei sowohl auf digitale Technologien, nämlich auf den CAS als auch auf konkrete hochschulmathematische Inhalte zurückgegriffen wird, werden das technologiebezogene pädagogische Wissen (TPK) sowie das inhaltsbezogene pädagogische Wissen (PCK) ebenfalls gefördert. Schließlich trägt die Entwicklung von unterrichtspraktisch-didaktischen Ideen für die Vermittlung von Beweisen in der Schule mit Hilfe von CAS (D) zur Förderung des technologisch-pädagogisches Inhaltswissens (TPaCK) bei.

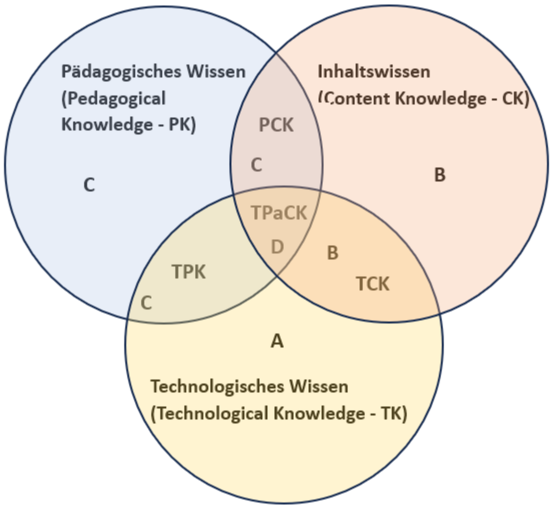

Abbildung 1: Verortung der durch die geplante Lehrinnovation zu fördernden Kompetenzen im TPaCK-Modell zur Implementierung von digitalen Technologien in die Fachlehrkräfteausbildung

ARBEITSPROGRAMM

Die Arbeit in der Lehrinnovation beginnt mit der Entwicklung eines integrativen Konzeptes mit Bezug zur Thematik der Lehrveranstaltung Arithmetik und Algebra unter Rückgriff auf die bereits vorhandenen CAS-unterstützten Beweise. Zudem werden weitere CAS-unterstützte Beweise entwickelt, im Modell von Wittmann und Müller (1988) verankert – so wie dies in Szűcs (2022b, 2022c) exemplarisch erfolgte –, und ins Konzept der Lehrveranstaltung integriert. Die Entwicklung von CAS-unterstützten Beweisen wird bis etwa Mitte des zweiten Durchlaufs durchgehend fortgesetzt.

Anhand dieses Konzeptes wird sowohl im Wintersemester 2024/25 als auch im Sommersemester 2025 in jeweils einer Seminargruppe eine Intervention von der Fellowship-Bewerberin durchgeführt (Interventionsgruppe), in deren Rahmen die Studierenden durchgängig (angestrebt wird jede Woche etwa ein Drittel der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit hierfür zu verwenden) CAS-unterstützte Beweise kennenlernen bzw. selbst entwickeln und im Modell von Wittmann und Müller (1988) verorten. Hierdurch wird erwartet, dass die Lernenden von den experimentellen Beweisen über die operativen Beweise einen Zugang zu formalen Beweisen erlangen.

Um diese Arbeit erfolgreich zu gestalten, wird die CAS-App von der Firma CASIO (CASIO Classpad II) den Studierenden auf iPads bereitgestellt. iPads verfügen einerseits über deutlich größere Rechenkapazität als entsprechende Handhelds, was gerade in der Hochschulmathematik von Bedeutung ist, anderseits bieten sie eine deutlich größere Bildschirmfläche, was ermöglicht, den Überblick über lange Beweise z. B. mit Bezug zu viel Platz einnehmenden Formeln und Matrizen nicht zu verlieren.

Mit Hilfe eines Fragebogens wird der Lernfortschritt mit Bezug zu Beweisen im Rahmen einer Pretest-Posttest-Befragung (Messzeitpunkte jeweils vor Beginn der Intervention bzw. nach der Durchführung desselben) erfasst. Die Leistung der Interventionsgruppe wird überdies mit der aus einer Kontrollgruppe verglichen. Letztere wird nach der gleichen Thematik, allerdings ohne Rückgriff auf CAS unterrichtet, sodass Rückschlüsse auf den Einfluss des CAS-Einsatzes auf die Beweiskompetenz gezogen werden können. Zusätzlich werden die digitalen Unterrichtsbeiträge der Interventionsgruppe gesammelt, um etwaige Schwierigkeiten, Ansätze und Ideen zu ermitteln und diese in den Planungsprozess einzubeziehen.

Zwischen den beiden Durchläufen wird das entwickelte Konzept anhand der konkreten empirischen Erfahrungen sowie der Befunde aus der Pretest-Posttest-Befragung revidiert und der zweite Durchlauf erfolgt im Sinne des revidierten Seminarkonzeptes.

Die Studierenden der Interventionsgruppe werden mindestens je einmal im Laufe der Lehrinnovation zu einer zusätzlichen mathematikdidaktischen Sitzung eingeladen, in deren Rahmen CAS-unterstützte Beweise mit Bezug zur Schulmathematik im Modell des experimentellen, operativen und formalen Beweises gemeinsam entwickelt und erprobt werden. Insbesondere Beweise aus dem Bereich der Arithmetik und Algebra scheinen hierfür geeignet. Die gesammelten Ideen werden auf einer digitalen Plattform (Moodle) gesammelt und langfristig (d. h. bis Ende ihres Studiums) der gesamten Gruppe zur weiteren Verwendung bzw. zum Weiterdenken bereitgestellt.

Die Erfahrungen werden mit Kolleg:innen des regionalen Netzwerkes Mitteldeutscher Mathematikdidaktiken (https://www.mi-didaktik.uni-jena.de/netzwerk-mdmd) im Herbst 2025 geteilt, indem ein Netzwerktreffen (zurzeit ist ein Treffen zweimal pro Semester üblich) an der Universität Erfurt ausgetragen wird. Zudem werden die Forschungsbefunde auf dem 17. International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT) im Sommer 2025 dem fachkundigen Publikum vorgestellt. Die Erstellung des Projektberichts schließt die Fellowship-Arbeit im Dezember 2025 ab.

ERFOLGSKRITERIEN UND RISIKOEINSCHÄTZUNG

Die Lehrinnovation wird als erfolgreich eingeschätzt, wenn es gelingt, CAS durchgehend in die Lehrveranstaltung Arithmetik und Algebra zu integrieren und die Studierenden mit Hilfe des CAS zum Entwickeln von formalen Beweisen zu befähigen. Derartige Beweise gehören zu den Standards in Zwischen- und Abschlussprüfungen an der Hochschule. Auf Grund des Neuheitseffekts des CAS-Einsatzes in der Hochschulmathematik sowie der Aktivitätssteigerung durch digitale Medien und Werkzeuge ist ein nennenswerter Zuwachs der fachlichen Kompetenz und der Einsicht von Vorteilen des CAS-Einsatzes sowohl in der Schulmathematik als auch in der Hochschulmathematik eine durchaus realistische Erwartung. Die zentrale **Herausforderung** besteht indes darin, dass die Studierenden die Intervention annehmen und in der Abschlussprüfung mindestens keine schlechteren Ergebnisse erzielen als die Kontrollgruppe.

Ein Risiko könnte sein, dass ein Teil der Studierenden die Arbeit mit dem CAS ablehnt, vor allem, weil es bisher in der Hochschulmathematik kaum eine Rolle spielt. Letzteres belegen die bisher unveröffentlichten Befunde der Evaluation der Pilotierung, in der lediglich 20 % der Befragten angeben, an der Hochschule CAS zu verwenden. Ein durchgehendes Konzept zum CAS-Einsatz kann diesem **Risiko** entgegenwirken und zugleich die **Chance** sein, dass CAS hierdurch ein integrierter Bestandteil der Hochschulmathematik wird. Zu diversen Bereichen existieren bereits zahlreiche ausgearbeitete CAS-unterstützte Beweise (z. B. zu einem Drittel der im Themenbereich komplexe Zahlen behandelter Beweise, ein Beispiel ist in der Anlage zu finden), sodass die Entwicklung eines durchgehenden Konzepts realistisch erwartet werden kann.

Ein weiteres **Risiko** könnte darin bestehen, dass sich die fachlichen Fähigkeiten der Studierenden in der Interventionsgruppe wegen des Zeitverlustes, der dadurch entsteht, dass sie sich mit neuen Befehlen des CAS sowie mit dem Modell von Wittmann und Müller (1988) auseinandersetzen müssen, nicht in dem gleichen Maß entwickeln wie in der Kontrollgruppe. Es gilt folglich, den Einfluss des CAS-Einsatzes auf die fachlichen Fähigkeiten im ersten Durchlauf exemplarisch zu überprüfen und das Konzept bei Bedarf vor Beginn des zweiten Durchlaufs gegebenenfalls zu modifizieren.

Erwarteter Mehrwert und Verstetigung

Von der Durchführung der Lehrinnovation wird vor allem erwartet, dass Lehramtsstudierenden der Universität Erfurt durch den CAS-Einsatz der Zugang zu formalen Beweisen erleichtert wird und diejenigen Studierenden, die an der Lehrinnovation teilnehmen, ihre fachlichen Kompetenzen in höherem Maße erweitern können als ihre Mitstudierenden ohne Teilnahme an der Lehrinnovation. Zudem wird erwartet, dass hierdurch der in Thüringen bereits verbindliche CAS-Einsatz im Mathematikunterricht an Gymnasien verstetigt wird, da auf die im Rahmen dieses schulischen Einsatzes erworbenen digitalen Kompetenzen in der Hochschulmathematik zurückgegriffen wird. Im Einklang hiermit wird vermutet und erwartet, dass Studierende in der Lehrinnovation durch den CAS-Einsatz beim Beweisen einerseits ihre digitalen Kompetenzen erweitern und dass sie andererseits die Kluft, welche zwischen Schul- und Hochschulmathematik tatsächlich existiert, leichter überwinden als ihre Mitstudierenden ohne Teilnahme an der Lehrinnovation. Es wird überdies erwartet, dass durch die Erfahrungen, die die Probanden in der Lehrinnovation mit den Möglichkeiten der Beweisführung unter Rückgriff auf CAS sowie mit dem Modell von Wittmann und Müller (1988) machen, leichter Vorstellungen von unterrichtspraktischen Ideen entwickeln, in welcher Form

Beweise in der Schule geführt werden können, weil sie sich am selbst erlebten Vorgehen orientieren können. Hierdurch wird einerseits ein fachdidaktischer Mehrwert von Seiten der Studierenden erreicht. Andererseits, falls die Studierenden die hierbei entwickelten Ideen in ihren Mathematikunterricht zukünftig integrieren, wird auch eine weitere Verstetigung des CAS-Einsatzes in Thüringer Schulen sowie die exemplarische Wiedereinführung von Beweisen in der Schulmathematik realisiert.

Bei einer – im Sinne der oben erwarteten Mehrwerte – erfolgreichen Lehrinnovation wird angestrebt, die Unterstützung des Zugangs zu formalen Beweisen in der universitären Lehre durch den CAS-Einsatz langfristig zu etablieren. Dies bedeutet einerseits, dass der CAS-Einsatz in die genannte Mathematik-Lehrveranstaltung (Arithmetik und Algebra) gemäß der in der Lehrinnovation entwickelten Konzeptes langfristig integriert wird, andererseits aber auch, dass weitere Lehrveranstaltungen im Bereich der Mathematik daraufhin überprüft werden, inwieweit CAS-unterstützte Beweise als integrierter Bestandteil derselben gelten können. Hierbei kommen die Bachelor-Pflichtveranstaltungen Lineare Algebra bzw. Analysis sowie die Wahlpflichtmodule Vertiefung Analysis bzw. Angewandte Mathematik in Frage. Überdies werden die im Rahmen der zusätzlichen Sitzungen entwickelten CAS-unterstützten Beweise mit Bezug zur Schulmathematik in reguläre Pflichtlehrveranstaltungen im Bereich der Mathematikdidaktik (Didaktik der Arithmetik) eingebunden, indem sie gemeinsam mit den Studierenden thematisiert, zur Diskussion gestellt, modifiziert und weiterentwickelt werden. Hierdurch wird also auch eine mathematikdidaktische Verstetigung der Ergebnisse angestrebt. Die langfristige Etablierung der Ergebnisse in die genannten Lehrveranstaltungen wird wenig zusätzliche Kosten verursachen, da mit 8 iPads 16 Studierende gleichzeitig bedient werden können und die Geräte – nach entsprechender Wartung – langjährig an der Fakultät erhalten bleiben. Die Verlängerung der Lizenzen (für Emulator-Software sowie App) verursacht jährlich Kosten in Höhe von ca. 1.200 €.

Austausch mit anderen Fellows

Die Lehrinnovation zielt auf einen grundlegenden Wandel. Angestrebt wird eine feststellbare stabilere Kontinuität bei den Phasenübergängen Schule – Studium – Beruf hinsichtlich der mathematischen Beweiskompetenz. Andere Studiengänge wie Ingenieurwissenschaften, Informatik etc. stehen mathematikbezogen vor vergleichbaren Aufgaben. Die Vorgehensweise, **technologische Neuerungen** für eine **verbesserte Anschlussfähigkeit** zu nutzen, bietet sich somit für den Austausch mit anderen Fellows an. Umgekehrt ist ein deutlicher Profit durch Impulse und Erfahrungen anderer Fellows zu erwarten. Der wechselseitige Transfer zwischen verschiedenen Standorten eröffnet vielversprechende Perspektiven, hierbei kann der gemeinsame Blick auf mehrere Lehrinnovationen besonders inspirativ und aussichtsreich für **netzwerkähnliche Kooperationen** sein.

LITERATUR

Barzel, B., Eichler, A., Holzäpfel, A., Leuders, T., Maaß, K., & Wittmann, G. (2016). Vernetzte Kompetenzen statt trägen Wissens – Ein Studienmodell zur konsequenten Vernetzung von Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Schulpraxis. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 33–50). Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10261-6_3

Bauer, S., & Büchter, A. (2018). „Mathematik ist eine beweisende Disziplin" – auch im nordrhein-westfälischen Zentralabitur? In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 197–200). Münster: WTM-Verlag.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte.* Berlin & Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-41864-8

Dana-Picard, T. (2006). Some Reflections On CAS Assisted Proofs Of Theorems. *The international journal for technology in mathematics education, 12*(4), 165–171.

Davis, P. J., Hersh, R. & Marchisotto, E. A. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston, Basel & Berlin: Birkhäuser.

de Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

DMV, GDM, MNU (2008). *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM, MNU.* https://madipedia.de/images/2/21/Standards_Lehrerbildung_Mathematik.pdf (03.05.2024)

Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A., Kwon, O.N. & Verschaffel L. (2016). *Transition on mathematics education.* ICME-13 topical surveys. Springer Open.

Hanna, G. & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education, 40*, 345-353. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0080-5

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien & New York: Springer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-3699-7

Jahnke, H. N., Sommerhoff, D. & Ufer, S. (2023). Argumentieren, Begründen und Beweisen. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 369-398). Berlin & Heidelberg: Springer Spektrum Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3_12

Jankvist, U. T. & Misfeldt, M. (2019). CAS assisted proofs in upper secondary school mathematics textbooks REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 8(3), 232–266. https://doi.org/10.17583/redimat.2019.3315

Koepf, W. (2016.) Einsatz von CAS in der Hochschulmathematik. In: G. Heintz, G. Pinkernell & F. Schacht (Hrsg.): *Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht. Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich* (S. 289-295). Neuss: Verlag Seeberger.

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2008). Introducing TPCK. In AACTE Committee on Innovation & Technology (Eds), Handbook of technological pedagogical content knowledge for educators (pp. 3–29). New York, NY: Routledge.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA). Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022*. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf (10.04.2024)

Leuders, T. (2018) (Hrsg.). *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Nagel, K., & Reiss, K. (2016). Zwischen Schule und Universität: Argumentation in der Mathematik. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 19*, 299–327. https://doi.org/10.1007/s11618-016-0677-3

Pinkernell, G., Reinhold, F., Schacht, F., & Walter, D. (2022) (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick*. Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7

Rach, S., Siebert, U., & Heinze, A. (2016). Operationalisierung und empirische Erprobung von Qualitätskriterien für mathematische Lehrveranstaltungen in der Studieneingangsphase. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze* (pp. 601–619). Wiesbaden: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10261-6_38

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica, 7*(1), 5-41.

Thüringer Ministerium für Bildung, Jugend und Sport (TMBJS). (2018.) *Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife. Mathematik.* https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=1392 (10.04.2024)

Thüringer Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur (TMBWK). (2011*). Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife. Mathematik.*

Weber, B-J. & Lindmeier, A. (2020). Viel Beweisen, kaum Rechnen? Gestaltungsmerkmale mathematischer Übungsaufgaben im Studium. *Mathematische Semesterberichte,* 67, 263–284. https://doi.org/10.1007/s00591-020-00274-4

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237-257). Berlin: Cornelsen.

Witzke, I (2015). Different understanding of mathematics: an epistemological approach to bridge the gap between school and university mathematics. In E. Barbin, U. Th. Jankvist & T. H. Kjeldsen (Eds.), *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the Seventh Summer University* (S. 303-321). Copenhagen: Aarhaus University.

Zehavi, N., & Mann, G. (2009). Proof and experimentation: Integrating elements of DGS and CAS. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Eds.) *Proof and Proving in Mathematics Education: ICMI Study 19 Conference Proceedings* (Volume 2, pp. 286–291). National Taiwan Normal University.

Ziegler, G. (2008). Über das Buch der Beweise. Was ist Mathematik? Versuch einer Antwort in vier Thesen. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 61*(7), 407-413.

ARBEITSPLAN

Phase	Zeitraum	Aufgaben	Verantwortliche:r
Vorbereitung	10/2024 bis 05/2025	▪ Entwicklung von Beweisbeispielen unter Rückgriff auf CAS mit Bezug zur Thematik der Lehrveranstaltung im Paradigma des experimentellen, operativen und formalen Beweises ▪ Entwicklung eines Fragebogens zur Ermittlung der Beweiskompetenz	FB* FB
Durchführung	10/2024 bis 02/2025	1. Durchlauf der Intervention ▪ Ermittlung der Beweiskompetenz (Pretest) ▪ Durchgängiger Einsatz von CAS-unterstützten Beweisen in der Interventionsgruppe ▪ Dokumentation und Auswertung der Lernprozesse ▪ Mathematikdidaktische Sitzung zur Ermittlung von Rückschlüssen auf die Schulmathematik ▪ Ermittlung der Beweiskompetenz gegen Ende des Semesters und Vergleich mit dem Pretest	 FB & wH** FB FB & wH FB FB & wH
	03/2025	▪ Modifizierung des Konzeptes bei Bedarf anhand der Testergebnisse sowie der unterrichtspraktischen Erfahrungen aus dem ersten Durchlauf der Intervention	FB
	04/2025 bis 07/2025	2. Durchlauf der Intervention ▪ Ermittlung der Beweiskompetenz (Pretest) ▪ Durchgängiger Einsatz von CAS-unterstützten Beweisen in der Interventionsgruppe ▪ Dokumentation und Auswertung der Lernprozesse ▪ Mathematikdidaktische Sitzung zur Ermittlung von Rückschlüssen auf die Schulmathematik ▪ Ermittlung der Beweiskompetenz gegen Ende des Semesters, Vergleich mit dem Pretest	 FB & wH FB FB & wH FB FB und wH
Nachbereitung	08/2025 bis 12/2025	▪ Präsentation von Erfahrungen und Ergebnissen auf dem internationalen Kongress ICTMT ▪ Organisation und Austragung des Netzwerktreffens Mitteldeutscher Mathematikdidaktiken (MDMD) mit dem Ziel des regionalen Austausches ▪ Erstellung des Projektberichts	FB FB und wH FB

*Fellowship-Bewerberin **wissenschaftliche Hilfskraft mit Bachelorabschluss